AVALIAÇÃO DE EFICIÊNCIA ORGANIZACIONAL ATRAVÉS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Marcelo Alvaro da Silva Macedo
Brasil – NEGEN/DCAC/ICHS/UFRuralRJ – alvaro@ufrrj.br
Márcia da Costa Bengio
Brasil – NEGEN/DCAC/ICHS/UFRuralRJ – alvaro@ufrrj.br

Palavras-Chave: Avaliação de Eficiência; Análise Envoltória de Dados; Performance Organizacional

Tema: Aplicaciones Matemáticas a la Contabilidad de Gestión

Recursos Audiovisuales: Microcomputador e Canhão de Projeção (Data Show)

AVALIAÇÃO DE EFICIÊNCIA ORGANIZACIONAL ATRAVÉS DE ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Palavras-Chave: **Avaliação de Eficiência; Análise Envoltória de Dados; Performance Organizacional**

Tema: Aplicaciones Matemáticas a la Contabilidad de Gestión

RESUMO:
A Contabilidade Gerencial deve se preocupar, dentre outros propósitos, com a avaliação da eficiência organizacional, ou seja, em avaliar como a empresa utiliza seus recursos (inputs) para obtenção de seus produtos (outputs). A finalidade deste trabalho é, então, contribuir para uma avaliação das técnicas de Análise Envoltória de Dados (DEA – Data Envelopment Analysis) na elucidação do funcionamento da empresa, no que tange sua performance. Sob o enfoque dos modelos DEA, tratar-se-á a problemática deste trabalho através de um exemplo ilustrativo, no qual será aplicado o modelo de Retorno Constante de Escala (CRS – Constant Returns to Scale), também conhecido como modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes – 1978). Analisar-se-á a utilização deste modelo como ferramenta gerencial no estabelecimento de uma ordem de eficiência relativa dentre as unidades (empresas, unidades de negócio, filiais, etc) avaliadas, que fornece também as razões pelas quais uma unidade é ineficiente, bem como quais unidades eficientes podem servir de benchmark para cada uma destas. De forma geral, busca-se entender como esta técnica, baseada em programação linear, pode servir de parâmetro no processo de tomada de decisão, avaliando a eficiência relativa de cada unidade, destacando as eficientes e as ineficientes, analisando os motivos pelos quais as unidades ineficientes não alcançaram o índice de 100 % (eficiência) e quais seriam as unidades eficientes que poderiam ser utilizadas como referência para as ineficientes.

1. Introdução

A globalização da economia e a abertura de mercados vêm alterando o perfil da atividade das empresas, que cada vez mais precisam encontrar formas de se adaptarem aos novos tempos. Desta forma, o mundo atual impõe às empresas uma busca pela vantagem comparativa a ser percebida pelos clientes. O ganho da produtividade das empresas é arma mais poderosa para atrair e manter a clientela, com melhores produtos e serviços a custos e preços menores. E os empresários devem buscar maiores índices de produtividade para conseguirem se manter num mercado tão competitivo, emergindo nessa perspectiva a seguinte questão: Como medir na prática, a produtividade? As dificuldades na medição da produtividade podem ser desdobradas em três partes:

- quais são as entradas apropriadas para o sistema e os medidores para as mesmas?
- quais são as saídas apropriadas do sistema e os medidores para as mesmas?
- quais são as formas apropriadas para medir o relacionamento entre essas entradas e saídas?

Felizmente, desenvolveu-se uma técnica com capacidade de comparar a eficiência de múltiplas unidades de serviço que fornecem serviços similares mediante a consideração explícita do uso de suas múltiplas entradas (isto é, recursos) na produção de múltiplas saídas (isto é, serviços).

A técnica, referida como Análise Envoltória de Dados (DEA), contabiliza explicitamente o *mix* de entradas e saídas, e é mais abrangente e confiável que o conjunto de taxas operacionais ou medidores de lucratividade. Então, o método DEA pode ser utilizado para comparar um grupo de unidades de serviços a fim de identificar as unidades relativamente ineficientes, medindo a magnitude das ineficiências, e, pela comparação das unidades ineficientes com as eficientes, descobrir formas para reduzir as ineficiências.

O objetivo deste trabalho é, então, efetuar uma avaliação da potencialidade da metodologia de DEA, bem como suas aplicações, em oferecer subsídios às empresas para realizarem diagnósticos de eficiência em suas unidades, em termos do uso de insumos (inputs) para obtenção de produtos (outputs).

A literatura se refere a dois tipos básicos de métodos que trabalham com o objetivo de mensurar eficiência e produtividade e, embora usem técnicas distintas para efetuar a mensuração, os dois tipos convergem no fato de estimar uma fronteira relativa ao máximo de produto possível de se obter utilizando os insumos disponíveis. O primeiro conjunto de métodos é formado por modelos paramétricos. O segundo conjunto de métodos, que é o objetivo deste nosso estudo, estabelece fronteira de produção baseada em programação matemática. Tais métodos são técnicas não-paramétricas, descritas na literatura e tratadas freqüentemente sob o título de DEA (Data Envelopment Analysis).

2. Programação Linear

De acordo com Bronson (1985), a Pesquisa Operacional (PO) diz respeito à locação eficiente de recursos escassos como capital, pessoal, etc.; que são importantes para a tomada de decisão, pois congrega diversas técnicas da modelagem matemática, que se consagraram devido à sua grande utilidade na solução de problemas de otimização. Os principais modelos de PO são denominados de Programação Matemática e constituem uma das mais importantes variedades de modelos quantitativos. Um problema de Programação Matemática é um problema de otimização no qual o objetivo e as restrições são expressas como funções matemáticas e relações funcionais.

Segundo Goldbarg e Luna (2000), as técnicas de solução do processo de modelagem matemática foram agrupadas em várias subáreas como:

- Programação linear;
- Programa não-linear;
- Programação inteira; e
- Programação quadrática.

Contudo, dentre os modelos citados, nosso estudo abrangerá unicamente métodos determinísticos em Programação Linear, que são um tipo especial de modelo de otimização.

Segundo Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000), a Programação Linear (PL) é uma ferramenta computacional de modelagem para tomadas de decisão associadas à alocação de recursos que transcendem todos os aspectos de gerenciamento de gerações de serviços. Ela se refere ao planejamento que utiliza modelos matemáticos que consistem em expressões lineares. Este é o modelo básico para a compreensão de todos os outros. Um modelo é um veículo para uma visão bem estruturada da realidade, ou seja, é uma abstração seletiva da realidade. A modelagem seleciona as características da realidade mais importantes para o problema de interesse. Sendo assim, a Programação Matemática é fortemente direcionada ao apoio da tomada de decisão no gerenciamento de sistemas de grande porte, principalmente no tratamento de variáveis quantificadas. No que diz respeito à tomada de decisão como o nome mesmo já diz é o ato de selecionar, dentre várias decisões possíveis, a mais adequada para o alcance de certo objetivo.

Ainda conforme Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000), modelos de programação linear são uma classe especial de modelos de otimização com restrições e para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo PL todas as relações entre variáveis são expressas com funções lineares e todos os modelos de PL possuem a seguinte forma algébrica:

$$\textit{Maximize (ou Minimize):} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\textit{Sujeito a (S.a.):} \qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_2$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_n$$

e às restrições de não-negatividade

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0\,.$$

Esta estrutura de problema contém as seguintes características:

- Variáveis de Decisão: as variáveis x_1, x_2,..., x_n são denominadas variáveis de decisão, as quais assumem valores reais maiores ou iguais a zero.
- Função Objetivo: a função $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ é denominada função objetivo, a qual pode ser maximizada (por exemplo, lucros) ou minimizada (por exemplo, custos), isso vai depender da natureza dos coeficientes c_1, c_2,..., c_n, onde esta função deve ser maior ou menor possível, atendendo às seguintes restrições do sistema.
- Restrições: quando valores numéricos são designados para as variáveis de decisão x_1, x_2,...,x_n para influenciar a função objetivo, estes valores também influenciam as restrições. Os modelos requerem que os valores numéricos sejam tais que não violem nenhuma restrição. O conjunto dos

números b_1, b_2,..., b_n é denominado lado direito da inequação, (RHS - Right-Hand Sides) que limitam indiretamente os possíveis valores das variáveis de decisão.

- Parâmetros: os coeficientes na função objetivo e os valores RHS são parâmetros. Os parâmetros são entidades cujo valor permanece fixo durante a resolução do problema, entretanto pode ser mudado depois.
- Constantes: os coeficientes a_{11}, a_{12},..., a_{1n} representam o consumo do primeiro recurso RHS por unidade de cada variável de decisão, que refletem uma taxa constante de utilização do recurso.

Portanto o modelo de Programação Linear reduz um sistema real a um conjunto de equações ou inequações onde pretendemos otimizar uma função objetivo. E uma das grandes contribuições à Programação Matemática desse século, segundo Goldbarg e Luna (2000) é o algoritmo simplex. O estudo desse algoritmo na opinião dos autores é indispensável para quem deseja dominar as técnicas quantitativas de análise e solução de problemas em um contexto razoavelmente avançado. Deste modo, eles definem simplex como um algoritmo que utiliza um ferramental baseado na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um PPL. Em suma, simplex é um algoritmo.

De acordo com os autores, dualidade é um conceito amplo que engloba a possibilidade do tratamento de duas naturezas distintas de uma mesma entidade, ou seja, eles definem duais como um par de modelos de programação matemática *primal* e *dual*. Este par de modelos preservam as seguintes condições:

- as funções objetivos são simétricas, isto é, se o primal for de minimização o dual será de maximização, reciprocamente.
- são simétricas as descrições das restrições, ou seja, se na forma canônica o primal possui restrições ≤ então o dual terá restrições ≥.
- os termos independentes no primal surgem como os coeficientes da função objetivo no dual, reciprocamente.
- a matriz de restrição do primal é a transposta da matriz de restrição do dual, reciprocamente.

Os PPLs abaixo generalizam o par de modelos primal x dual.

$$\begin{array}{ll} \text{Pr}\,\mathit{imal} & \mathit{Dual} \\ \\ \mathit{Minimizar:}\ Z_0 = cx & \mathit{Maximizar:}\ W_0 = ub \\ \mathit{Sujeito\ a:}\ Ax \geq b & \mathit{Sujeito\ a:}\ uA^T \leq c \\ x \geq 0 & u \geq 0 \end{array}$$

onde x é um vetor coluna e u é um vetor linha; A é a matriz de restrição do primal e A^T é a matriz de restrição do dual; e b é o coeficiente no primal que surge como coeficiente na função objetivo.

Estes PPLs apresentam propriedades importantes como a que referencia ao valor das funções objetivo Z_0 e W_0 quando encontram seus valores ótimos x' e u'. Além desses valores numéricos, existe uma dependência entre a condição de viabilidade de cada um desses modelos, que pode ser verificada através do Teorema das Folgas Complementares, que segundo o autor diz:

> *"Dado um par de programas duais, uma condição necessária e suficiente para que as soluções x' e u' sejam ótimas é que se verifiquem as seguintes relações de complementaridade de folga: u(Ax – b) = 0 e (c – uA)x = 0. " (Goldbarg e Luna, 2000, p.138).*

O que foi dito até aqui, é que existem métodos aritméticos simples capazes de maximizar (ou minimizar) funções lineares sujeitas a restrições em forma de desigualdades lineares. Porém existem métodos para resolver problemas mais complexos, que exigem soluções inteiras ou que envolvem funções não-lineares ou restrições aleatórias, mas são muito complicados e não garantem muitas vezes a convergência. Discutimos alguns métodos de resolução de problemas lineares, mas note que no caso de problemas grandes, com muitas variáveis e restrições, as dificuldades de computação são enormes.

3. Análise Envoltória de Dados (DEA)

Lins e Meza (2000) relatam que, segundo CHARNES (1994) a história da Analise Envoltória de Dados (DEA) teve início com a dissertação de RHODES para obtenção de grau Ph.D, que foi supervisionada por COOPER e publicada em 1978. O objetivo da tese foi desenvolver um método para comparar a eficiência de escolas públicas norte-americanas (Decision Making Units – DMU's) levando em conta "*outputs*" como:

- Scores aritméticos;
- Melhoria de auto-estima medida em testes psicológicos;
- Habilidade psicomotora;

e "*inputs*" como:

- Número de professor-hora;
- Tempo gasto pela mãe em leituras com o filho.

Inicialmente esta técnica foi utilizada na avaliação de escolas públicas norte-americanas, entretanto hoje é aplicada em problemas diversos de cunho empresarial.

De acordo com Pereira (1995), a Análise Envoltória de Dados (DEA) é uma técnica de Pesquisa Operacional, que tem como base a Programação Linear, e cujo objetivo é analisar comparativamente unidades independentes (empresas, departamentos, etc) no que se refere ao seu desempenho operacional. Ela fornece uma medida para avaliar a eficiência relativa das unidades de tomada de decisão (DMUs). Definimos DMU, ou Decision Making Unit, como uma firma, departamento, divisão ou unidades administrativa ou operacional, cuja eficiência está sendo avaliada. Cada DMU é representada por um conjunto de S *outputs* e um conjunto M de *inputs*. A idéia básica é a comparação dos *outputs* com os *inputs*. Os *outputs* podem ser, por exemplo, os valores mensais de um faturamento da empresa com classes diversas de produtos. Para produzi-los as empresas têm que utilizar fatores de insumos diversos como área da loja, grau de acessibilidade, dentre outros. Isto é, tem-se um conjunto de *inputs*. Existe uma extensa literatura sobre a avaliação da produtividade, que se refere a dois conjuntos de métodos básicos para analisar a eficiência, ou produtividade, da utilização dos recursos produtivos de organizações ou empresas. São conhecidos como métodos paramétricos e, não-paramétricos, onde estes têm o objetivo de estimar uma fronteira relativa que leve ao máximo de produção, utilizando o mínimo de insumos.

Ainda segundo Pereira (1995), os métodos não-paramétricos se derivam das técnicas de DEA, iniciadas por FARREL (1957) e ampliadas por CHARNES, COOPER e RHODES (1978) e BANKER, CHARNES e COOPER (1984). Os resultados de DEA são mais detalhados do que os obtidos na abordagem paramétrica, servindo melhor ao embasamento de recomendações de natureza gerencial. Este conjunto de métodos recebeu grande destaque depois da publicação do artigo introdutório de CHARNES, COOPER e RHODES (1978) para a obtenção de grau de Ph.D de RHODES, que ficou popularmente conhecido como DEA (Data Envelopment Analysis). A DEA representa uma das mais adequadas ferramentas para avaliar a eficiência, em comparação com ferramentas convencionais, sendo assim, são destacadas as seguintes características:

- Não requer a *priori* uma função de produção explícita;
- Examina a possibilidade de diferentes, mas igualmente eficientes, combinações de *inputs* e *outputs*;
- Localiza a fronteira eficiente dentro de um grupo analisado e as unidades incluídas;

- Determina, para cada unidade ineficiente, subgrupos de unidades eficientes, os quais formam seu conjunto de referência.

São várias as formulações dos modelos de DEA encontradas na literatura, conforme diz o Bandin (1997), entretanto dois modelos básicos DEA são geralmente usados nas aplicações. O primeiro modelo chamado de CCR (CHARNES, COOPER e RHODES, 1978), também conhecido como CRS (Constant Returns to Scale), avalia a eficiência total, identifica as DMUs eficientes e ineficientes e determina a que distância da fronteira de eficiência estão às unidades ineficientes.

O segundo chamado de modelo BCC (BANKER, CHARNES e COOPER, 1984), também conhecido como VRS (Variable Returns to Scale), utiliza a formulação dual, sendo este normalmente usado no *benchmarking.* Este modelo permite a projeção de cada DMU ineficiente sobre a superfície de fronteira (envoltória) determinada pelas DMUs eficientes.

A autora define *Benchmarking* como um processo contínuo e sistemático de avaliação de empresas e serviços através de sua comparação com unidades consideradas eficientes, levando ao estabelecimento de ações gerenciais efetivas com o objetivo de aprimorar os resultados (redução de custos, aumento de produção, etc). A DEA tem sido utilizada, igualmente, para o benchmarking das unidades ineficientes, relacionadas aos grupos de referência formados por unidades eficientes (BANKER, CHARNES e COOPER, 1984). Trata-se de uma poderosa ferramenta para definir estratégias para o Benchmarking, com a finalidade de indicar linhas de ação para tornar eficientes empresas ineficientes.

Ainda de acordo com Bandin (1997), FARREL (1957) define uma organização eficiente como aquela que consegue produzir o maior *output* dado um certo *mix de inputs*. Então, a ineficiência técnica pode ser associada ao fracasso em alcançar a fronteira de eficiência, ou seja, fracasso em alcançar o máximo de *outputs* dado um certo *mix de inputs* (CHARNES e COOPER, 1990). FARREL (1957) propôs que a eficiência de uma firma consiste de dois componentes: eficiência técnica, que reflete a habilidade de uma firma para obter *output* máximo para um dado *set* de *inputs* e eficiência alocativa, que reflete a habilidade da firma em usar proporções ótimas, dando seus respectivos preços e a produção tecnológica. Essas duas medidas são combinadas para fornecer a medida de total eficiência econômica.

Conforme dito anteriormente, a Análise Envoltória de Dados (DEA) envolve o uso de métodos de programação linear para construir uma fronteira não-paramétrica sobre os dados. Medidas de eficiência são calculadas em relação a sua fronteira.

De acordo com Coelli, Rao e Baltese (1998), Charnes, Cooper e Rhodes (1978) propuseram um modelo que tinha uma orientação *input* e assumia CRS (ou CRST). Artigos subseqüentes tem considerado várias alternativas, assim como Banker, Charnes e Cooper (1984), em que o modelo de Retorno Variável de Escala foi proposto. Segundo Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000), para generalizarmos o modelo DEA CRS/ótica primal, definiremos algumas notações:

- Faça E_k, com k = 1,...,n DMUs, onde n é o número total de unidades que estão sendo avaliadas, ser a razão de eficiência da unidade k, definida como a relação dos *outputs* sobre os *inputs*.
- Faça u_j, com j = 1,...,s *outputs* de cada DMU, ser um coeficiente de saída para j, onde s é o número total de tipos de saídas sendo considerados. A variável u_j é a medida da diminuição relativa na eficiência com cada unidade de redução do valor de saída.
- Faça v_i, com i = 1,...,m *inputs* de cada DMU, ser um coeficiente de entrada para i, onde m é o número total de tipos de entrada. A variável v_i mede o aumento relativo na eficiência com cada redução unitária do valor de entrada.
- Faça y_{jk} ser o número observado de unidades de saída j, geradas pela unidade de serviço k durante um período de tempo.

- Faça x_{ik} ser o número real de unidades de entrada i, utilizadas pelas unidades de serviços k durante um período de tempo.

Assim, segundo os autores, um caminho intuitivo para introduzir DEA é por meio de forma de razão. Para cada DMU, gostaríamos de obter uma medida de razão de todos os *outputs* sobre todos os *inputs*, ou seja, os pesos ótimos u_j e v_i são obtidos pela resolução do problema de programação matemática.

$$Max\ E_c = \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j\, y_{jc}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ic}}$$

$$S.a.: \quad \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j\, y_{jk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ik}} \leq 1,\ k = 1,2,\ldots,c,\ldots,n$$

$$u_j \geq 0,\ \forall j,$$

$$v_i \geq 0, \forall i \qquad (equação\ 2.2.1.1)$$

onde c é o índice da unidade que está sendo avaliada. O problema acima envolve a procura de valores para u e v, que são os pesos, de modo que maximize a soma ponderada dos *outputs* (*output* “virtual”) dividida pela soma ponderada dos *inputs* (*input* “virtual”) da DMU em estudo, sujeita a restrição de que esse quociente seja menor ou igual a 1, para todas as DMUs.

Esta função está sujeita à restrição de que, quando o mesmo conjunto de coeficientes de entrada e saída (v_is e u_js) for aplicado a todas as outras unidades de serviços que estão sendo comparadas, nenhuma unidade de serviço excederá 100% de eficiência ou uma razão de 1,00. Um problema como este de formulação de razão particular possui infinitas soluções ótimas. Para evitar isto, ainda segundo Coelli, Rao e Baltese (1998), uma possível imposição seria $\sum v_i\, x_{ic} = 1$, pois além disto, queremos linearizar as restrições do problema, de modo a transformá-lo em um Problema de Programação Linear (PPL). Então introduzindo a transformação linear desenvolvida por Charnes e Cooper (1962) obtemos:

$$Max\ E_c = \sum_{j=1}^{s} u_j\, y_{jc}$$

$$S.a.: \quad \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ic} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j\, y_{jk} - \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ik} \leq 0,\ k = 1,2,\ldots,c,\ldots,n$$

$$u_j,\ v_i \geq 0,\ \forall x, y. \qquad (equação\ 2.2.1.2)$$

Esta forma do problema é conhecida como problema dos multiplicadores, como também são chamados os pesos, u_j e v_i. Denotamos este primeiro PPL por CRS/M/I.

Usando a dualidade em programação linear, podemos derivar uma forma de envelopamento equivalente deste problema. O modelo do envelope, também, será desenvolvido a partir da análise de eficiência relativa as DMUs que estão sendo observadas. Desta forma o PPL será expresso como:

$$Min\ \ E$$

$$S.a.: Ex - \sum_{j=1}^{n} \mu_j\ x_j \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j\ y_j \geq y$$

$$\mu_j \geq 0, \forall j\ e\ E \geq 0 \qquad (equação\ 2.2.1.3)$$

onde E será interpretado como o indicador de eficiência da DMU analisada, baseado na possibilidade da redução de insumos para obter a eficiência máxima.

Esta forma de envelopamento envolve pouquíssimas constantes do que a forma dos multiplicadores, (m + s < n + 1), e em geral é recomendado que o número total de variáveis, m + s, seja a metade do número de DMUs do modelo dos multiplicadores sendo esta a forma preferida para resolução. O valor de E obtido irá satisfazer a restrição ≤ 1 e o conjunto de pontos, tais que E = 1 é definido como a fronteira de eficiência . Observe que o problema de programação linear pode ser solucionado n vezes, para cada DMU. Este modelo é denotado por CRS/E/I, sendo E a indicação para o modelo do envelope.

Os PPLs acima apresentados são modelos com orientação *input* (I) que procuraram identificar ineficiência técnica como uma redução proporcional em *input* usado, com níveis constantes de *output*. Isto corresponde ao *output* de Farrel baseado em medidas de ineficiência técnica, que também é possível para medida de ineficiência técnica como acréscimo na produção de *output*, com níveis de *input* fixado. As duas medidas provém o mesmo valor sobre CRS, mas não são iguais quando é assumido VRS.

Coelli, Rao e Baltese (1998) relatam que em um certo número de estudos, verificou-se que os analistas tendem a selecionar modelos com orientação *input* porque muitas firmas têm ordens particulares para preencher e, portanto, as quantidades de *input* apresentam-se como variáveis de decisão primária, ainda que este argumento não seja forte em todas as indústrias. Segundo eles em algumas indústrias, as firmas poderiam ter uma quantidade fixada de recursos e poderia ser perguntado: Como é possível produzir muito *output*? Neste caso, uma orientação *output* poderia ser mais apropriada, onde o objetivo é maximizar os produtos obtidos sem alterar o nível atual dos *inputs*. O modelo para este propósito se obtém invertendo o quociente do modelo apresentado inicialmente, na qual obtemos:

$$Min\ \frac{\sum v_i\ x_{ic}}{\sum u_j\ y_{jc}}$$

$$S.a.: \frac{\sum v_i\ x_{ik}}{\sum u_j\ y_{jk}} \geq 1,\ k =\ 1,2,...,c,\dots,n$$

$$u_j,\ v_i \geq 0, \forall\ x,\ y \qquad (equação\ 2.2.3.1)$$

Assim, a eficiência pela ótica dos *outputs* é calculada pelo inverso da função objetivo, ou seja , eficiência = $\frac{1}{E}$. Este problema define a relação dos *inputs* sobre os *outputs*, onde c é o índice da unidade que está sendo avaliada. Temos neste problema as mesmas variáveis de decisão u_x e v_y e podemos linearizar este da mesma forma que o primeiro, porém queremos minimizar a soma ponderada dos *inputs* ("*input*" virtual) dividida pela soma ponderada dos *outputs* ("*output*" virtual) da DMU em estudo, sujeita a restrição de que este quociente seja maior ou igual a 1, para todas as DMUs. Para transformá-lo em um problema de programação linear, teremos que usar a imposição $\sum u_j y_{jc} = 1$ e então, teremos:

$$
\begin{aligned}
& Min \ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ic} \\
& S.a.: \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jc} = 1 \\
& \qquad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} u_j y_{jk} \geq 0, \ k = 1, \ldots, c, \ldots, n \\
& \qquad u_j, v_i \geq 0, \forall x, y
\end{aligned}
\qquad (equação\ 2.2.3.2)
$$

Esta forma de problema é conhecida como problema dos multiplicadores, entretanto com orientação *output.* Denotamos este PPL por CRS/M/O. Formulando o dual deste modelo obtemos o modelo do envelope (CRS/E/O):

$$
\begin{aligned}
& Máx\ E \\
& S.a.: \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq x \\
& \qquad Ey - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \leq 0 \\
& \qquad \lambda_j \geq 0 \ \ \forall j, \ E \geq 0
\end{aligned}
\qquad (equação\ 2.2.3.3)
$$

Alguns autores fixam o primal como um problema de minimização ou de maximização, contudo isso não é necessário para caracterizar a dualidade. Fixar o modelo como representante de uma das classes dessa relação é no mínimo inconveniente porque a relação é reflexiva, ou seja, o dual do dual é o primal. Então temos a seguinte relação:

Quadro 01 – Tipos de Modelos e Orientações e a Função Objetivo

Modelo/Orientação	**Função Objetivo**
Envelope/*Output*	Maximizar
Envelope/*Input*	Minimizar
Multiplicador/*Output*	Minimizar
Multiplicador/*Input*	Maximizar

Lins e Moreira (2000) apresentam uma implementação da metodologia DEA que, segundo eles, foi desenvolvida por Golany e Roll (1989), e que é utilizada largamente de maneira formal como intuitivamente. De acordo com os autores, Golany e Roll estabelecem três principais fases. A primeira visa a determinação do conjunto de DMUs homogêneas a serem avaliadas, ou seja, define e seleciona DMUs a entrarem na análise. Lembrando que uma vez definidas as DMUs, estas devem ser no mínimo o dobro do número de variáveis utilizadas no modelo.

A segunda fase seleciona as variáveis (*input e output*), considerando a princípio uma grande lista de possíveis variáveis a entrar no modelo. Estas variáveis podem ser controláveis ou não, quantitativas ou qualitativas. Vale a pena ressaltar que, a introdução de um grande número de variáveis reduz a capacidade do DEA de distinguir as DMUs eficientes das ineficientes e, portanto, o modelo deve ser o mais compacto possível para maximizar o poder discriminatório do DEA.

A terceira fase é a aplicação dos modelos DEA. Conforme os autores, a literatura sobre DEA extensivamente referenciada por Charnes (1995) e Coelli (1998), não tem se dedicado muito a seleção de variáveis para modelagem, pelo contrário têm adotado uma abordagem baseada na opinião do interessado, usuário e/ou especialista. Desta forma, ou autores afirmam que não é preciso se preocupar em utilizar alguma técnica para seleção de variáveis quando se tem uma pequena disponibilidade de variáveis e grandes quantidades de observações, ou até mesmo nos casos em que o número de DMUs é pequeno em relação ao número de possíveis *inputs e outputs*. Assim, eles limitam-se a afirmar que as variáveis escolhidas são as que melhor descrevem a performance das DMUs sob análise. Ao contrário dos pesos, que representam um sistema de valor relativo para cada DMU o qual fornece o melhor escore possível para a DMU. Na sua forma clássica DEA permite total flexibilidade na seleção dos pesos, que é importante para identificar as DMUs ineficientes, que tem baixa performance , fazendo com que cada DMU atinja o escore máximo de eficiência viável para seus níveis de *inputs* e *outputs*. Portanto o interesse aqui é estabelecer limites, permitindo certa flexibilidade e certa incerteza sobre o valor real dos pesos.

4. Exemplo Numérico Ilustrativo

Para ilustrar a aplicação das técnicas de Análise Envoltória de Dados (DEA) vamos nos utilizar de um exemplo numérico. Cabe ressaltar que este só deve ser encarado como uma forma ilustrativa de demonstrar a aplicação do modelo apresentado anteriormente, procurando apresentar o conjunto de ferramentas gerenciais oriundas desta análise. Este exemplo é baseado no que é proposto em Fitzsimmons e Fitzsimmons (2000).

Uma nova rede de lanchonetes do tipo fast food estabeleceu seis unidades (filiais) em diferentes bairros do Rio de Janeiro. Cada unidade se localizou no estacionamento de um shopping. Somente uma refeição-padrão era oferecida, consistindo de um hambúrguer (carne bovina), batatas fritas e um refrigerante (300 ml). A tabela abaixo resume os dados de duas entradas (inputs): salários (R$) e consumo de materiais (R$) durante um dia típico, a fim de gerar uma saída (output) relativa à venda de refeições.

Tabela 01 – Dados das DMU's em termos de Outputs e Inputs

Unidade de Serviço DMU's	**Refeições Vendidas Output 1 (u1)**	**Salários em R$ Input 1 (v1)**	**Materiais em R$ Input 2 (v2)**
1	20	80	30
2	22	100	30
3	18	100	28
4	25	130	29
5	17	150	25
6	19	165	27

Para obtermos uma compreensão de DEA, iremos aplicar este exemplo nos PPLs formulados, e então resolvê-los a fim de determinar as taxas de eficiência e outras informações pertinentes. Como qualquer modelo CRS gera a mesma resposta, vamos rodar apenas o CRS/M/I, onde a formulação para a DMU 01 fica da seguinte maneira:

Max 20 u1
st
20 u1 - 80 v1 - 30 v2 <=0
22 u1 - 100 v1 - 30 v2 <= 0
18 u1 - 100 v1 - 28 v2 <= 0
25 u1 - 130 v1 - 29 v2 <= 0
17 u1 - 150 v1 - 25 v2 <= 0

19 u1 - 165 v1 - 27 v2 <= 0
80 v1 + 30 v2 = 1

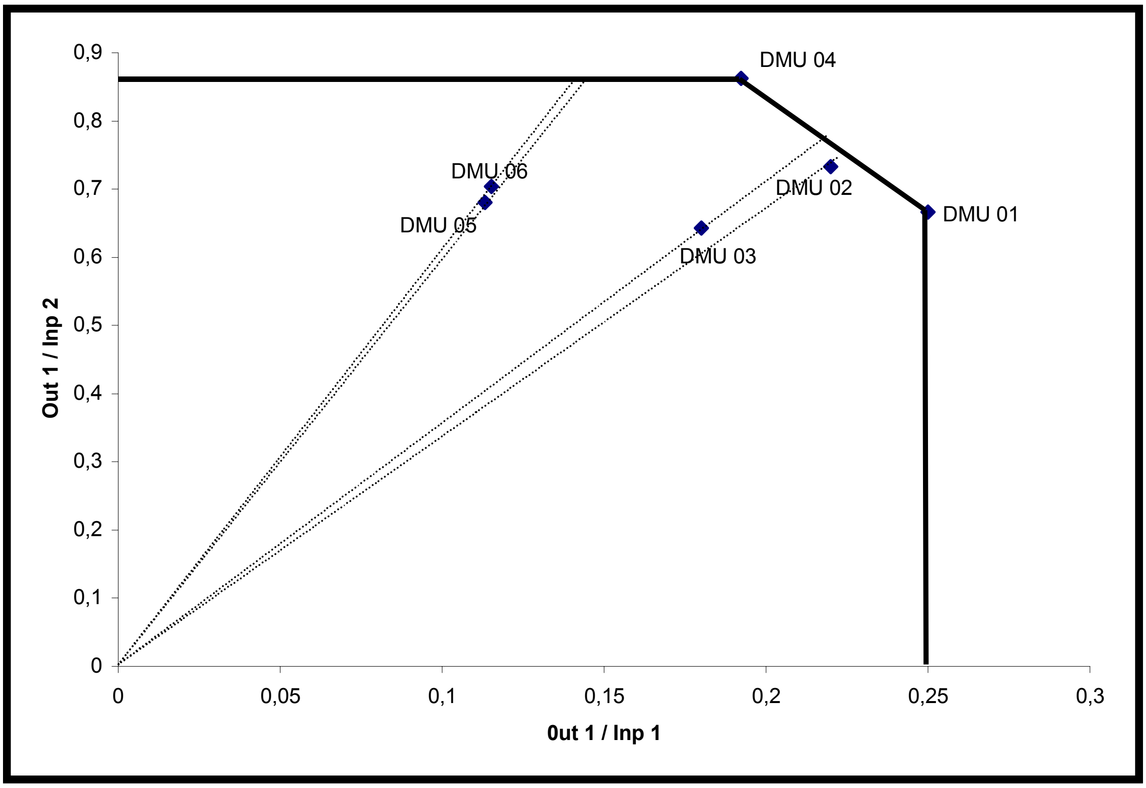
Repetiu-se esta formulação para as outras 5 DMU's, trocando-se apenas a função objetivo e a última linha pelos respectivos valores dos outputs e inputs de cada uma destas. Através da utilização do programa LINDO 6.1 da Lindo Systems (programação linear), rodou-se os PPL's e obteve-se as seguintes respostas:

Tabela 02 – Eficiência das DMU's e Pesos dos Outputs e dos Inputs

DMU's	Eficiência	Pesos		
		Output 1 (u1)	Input 1 (v1)	Input 2 (v2)
01	100 %	0,05	0,0125	0,00
02	99,31428 %	0,045143	0,004857	0,017143
03	84,14201 %	0,046746	0,005030	0,017751
04	100 %	0,04	0,004304	0,015190
05	78,88 %	0,0464	0,00	0,04
06	81,62963 %	0,042963	0,00	0,037037

Os resultados nos mostram que somente as DMU's 01, 03 e 05 são eficientes. Isto também poderia ser visto através do seguinte gráfico da fronteira eficiente.

Gráfico 01 – Fronteira Eficiente



Neste gráfico utilizou-se como eixo x os valores de output 1 / input 1 e no eixo y os valores de output 1 / input 2. Como nosso objetivo é maximizar os pontos nestes dois eixos, temos as DMU's 01 e 04 como eficientes.

O DEA aponta as DMU's 02, 03, 05 e 06 como ineficientes, porém cada uma delas apresenta um grau diferente de ineficiência. Para torna-las eficiente teríamos que projetar cada DMU ineficiente sobre a fronteira através de uma linha que passaria pela origem do gráfico e pelo ponto representativo de cada uma destas.

Além destes resultados pode-se obter uma análise de benchmarking, identificando quais DMU's eficientes podem ser consideradas como referência para quais DMU's ineficientes. No gráfico anterior pode-se ter uma idéia de quais DMU's são referências para quais DMU's. Mas na análise pelo DEA pode-se ter uma melhor visão de quais e como as DMU's ineficientes usam as DMU's eficientes como benchmarks.

Quadro 02 – Análise de Benchmarking

DMU's Ineficientes	Referências	
	DMU's Eficientes	Pesos
02	01	0,628571
	04	0,377143
03	01	0,394083
	04	0,404734
05	04	0,680000
06	04	0,760000

As conclusões que podemos chegar com estes números, podem ser visualmente obtidas através da análise do gráfico anterior. Cada DMU ineficiente utiliza um conjunto de DMU's eficientes como referência para que ela possa se tornar eficiente. Os pesos encontrados no modelo, que representam o peso relativo associado a cada unidade eficiente no cálculo da taxa de eficiência para as unidades ineficientes, mostram o quanto os inputs da DMU ineficiente precisam se referenciar aos inputs das DMU's eficientes, utilizadas como benchmark, para que a mesma possa alcançar a eficiência mantendo os atuais níveis de outputs. O quadro a seguir mostra os níveis de inputs ideais para cada DMU ineficiente:

Quadro 03 – Níveis de Inputs ideais e Desperdícios Associados

DMU 02					
Inputs	Conjunto de Referência		Valor do Input Ideal	Valor do Input Atual	Excesso de Inputs
	DMU 01	DMU 04			
Input 1 (R$)	80 x 0,628571	130 x 0,377143	99,31427	100	0,68573
Input 2 (R$)	30 x 0,628571	29 X 0,377143	29,794277	30	0,205723
DMU 03					
Inputs	Conjunto de Referência		Valor do Input Ideal	Valor do Input Atual	Excesso de Inputs
	DMU 01	DMU 04			
Input 1 (R$)	80 x 0,394083	130 x 0,404734	84,14205	100	15,85794
Input 2 (R$)	30 x 0,394083	29 x 0,404734	23,559775	28	4,440224
DMU 05					
Inputs	Conjunto de Referência		Valor do Input Ideal	Valor do Input Atual	Excesso de Inputs
	DMU 04				
Input 1 (R$)	130 x 0,68		88,40	150	61,60
Input 2 (R$)	29 x 0,68		19,72	25	5,28
DMU 06					
Inputs	Conjunto de Referência		Valor do Input Ideal	Valor do Input Atual	Excesso de Inputs
	DMU 04				
Input 1 (R$)	130 x 0,76		129,24	165	35,76
Input 2 (R$)	29 x 0,76		22,04	27	4,96

Uma outra forma de verificar o grau de ineficiência de cada DMU é analisar a folga ou a sobra da restrição referente a DMU que está sendo analisada. Por exemplo, na análise da DMU 02 temos que o somatório do produto dos pesos pelos respectivos outputs e inputs é igual a – 0,006857 [(22 x 0,045143) – (100 x 0,0048457) – (30 x 0,017143)]. Ou seja, a restrição tem uma folga de 0,006857. Se multiplicarmos este valor pelo uso de cada input obteremos a redução necessária em cada um deles para que a DMU se torne eficiente. Em outras palavras, para o input 1 teremos (100 x 0,006857 = R$ 0,6857) e para o input 2 (30 x 0,006857 = R$ 0,20532), que são exatamente os valores de excesso de uso de inputs calculados no quadro anterior.

O exposto acima persegue a idéia inicial de benchmark, ou seja, a tentativa de olhando o que já existe tentar fazer com que uma DMU ineficiente se torne eficiente. Mas podemos ver isso de outra forma, ou seja, pela redução individual de cada input. Em outras palavras, podemos buscar a alteração de um dos inputs para tentar alcançar a eficiência para a DMU. Pode-se perceber que o valor de 0,006857 é exatamente o nível de ineficiência total (o que falta para ser eficiente, ou seja, 1 – 0,9931428). Como os valores dos pesos v1 e v2 estão associados com as entradas de insumos, podemos obter ineficiência das DMU's em relação a cada input dividindo a ineficiência total pelo valor do peso associado a cada input. Novamente usando a DMU 02 como exemplo podemos ver o seguinte: para o input 1 (0,006857 / 0,004857 = R$ 1,411776817) ou para o input 2 (0,006857 / 0,017143 = R$ 3,999883334). Em resumo pode-se dizer que para que a DMU 02 se torne eficiente, mantendo o mesmo nível de outputs, basta que o input 1 seja reduzido em R$ 1,411776817 ou que o input 2 seja reduzido em R$ 3,999883334.

O problema é no caso dos inputs que não estejam sendo considerados na resolução do problema, ou seja, os inputs que tenham peso igual a zero. Quando isso acontece precisamos observar, além do exposto anteriormente, a redução necessária no coeficiente daquele input (valor da utilização do input) para que o mesmo fizesse parte da solução ótima. O quadro a seguir mostra as folgas de cada DMU (nível de ineficiência) e a redução no coeficiente necessária para o respectivo input fazer parte do solução ótima (para os casos de peso igual a zero – ver tabela 02).

Quadro 04 – Folgas e Redução de Custo

DMU's	Folgas ou Nível de Ineficiência	Redução de Coeficientes (custos)
01	0,00	
02	0,006857	
03	0,15858	
04	0,00	
05	0,2112	Para o Input 1 = R$ 29,92
06	0,183704	Para o Input 1 = R$ 35,888889

O fato do peso assumir valor zero acontece, pois a formulação busca a melhor combinação de pesos para que a DMU alcance o melhor índice de eficiência possível. Conforme, já abordado na revisão bibliográfica anterior, se um determinado input tem peso igual a zero ou um outro valor muito alto em relação aos outros, ou seja, se a importância daquele input está sendo sub-avaliada ou superavaliada na problemática, pode-se utilizar do artifício de restringir os pesos a valores (ou faixa de valores) que o analista, segundo sua experiência e expertise, considere ideais.

5. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após esta pesquisa conseguimos obter algumas conclusões sobre os modelos não-paramétricos. Na análise geral, notamos que o modelo CRS/DEA, apesar das deficiências apresentadas, como sensibilidade na coleta de dados, possibilita realizar a mensuração da eficiência de unidades organizacionais similares.

O modelo possibilita a comparação em um sentido multidimensional na capacidade com que cada unidade organizacional transforma seus insumos em produtos e ainda, informa alterações que devem ser realizadas no nível de utilização de insumos e de produtos fabricados, para tornar unidades ineficientes em eficientes.

Outros estudos realizados, relativos à mensuração de eficiência organizacional, apresentam deficiências quanto às metodologias utilizadas para tal fim. Os próprios autores, que desenvolvem tais trabalhos, reconhecem estas limitações. Assim, as características apresentadas pelas técnicas de DEA na quantificação da eficiência, e as deficiências metodológicas existentes em outros modelos leva-nos a concluir que estas técnicas podem ser úteis principalmente no Brasil, onde existe uma carência muito grande de instrumentos, deste porte e neste campo, para auxílio à gerência no processo decisório.

Após termos realizado este estudo sobre o funcionamento do modelo de CRS/DEA, observamos que este pode ser útil para a determinação dos níveis de eficiência, no qual encontram-se empresas similares.

Um ponto importante para aqueles que trabalham ou venham a trabalhar com DEA é ser cuidadoso com a utilização do banco de dados, pois erros de informação poderão invalidar os resultados e, assim, levar a conclusões totalmente viezadas.

Outro fator relevante é a escolha do modelo a ser utilizado para análise que deverá ser adequado com os objetivos que se pretenda atingir. Caso contrário se obterá um grupo de unidades eficientes, que na realidade não representam os padrões de referência necessários para se efetuar possíveis interferências ou comparações.

Em outros trabalhos estaremos explorando os outros modelos de DEA e comparando-os com o apresentado neste trabalho e abordando as vantagens e desvantagens em utilizar as restrições aos pesos nos modelos apresentados, possibilitando assim, verificarmos a robustez dos escores de eficiência, quando da introdução das preferências e experiências dos analistas.

6. Bibliografia

- ACKOFF, Russell L.; SASIENI, Maurice W.. Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos da Universidade de São Paulo, 1971.
- BANDIN, Neiva Terezinha. Avaliação da Produtividade de Supermercados e seu Benchmarking. Florianópolis, Outubro de 1995. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção – Universidade Federal de Santa Catarina. Tese de Mestrado - Consultada no dia 30/01/03 às 16 : 42 h no site: http://www.eps.ufrsc.br/disserta98/neiva.
- BRONSON, Richard. Pesquisa Operacional. São Paulo: McGraw-Hill Ltda, 1985.
- COELLI, Tim; RAO, D. S. Prasada; BALTESE, George E.. An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis. Massachusetts: KAP, 1998.
- FITZSIMMONS, James A.; FITZSIMMONS, Mona J. A Administração de Serviços. 2º edição. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- GOLDBARG, Marco César; LUNA, Henrique Pacca. Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos a Algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
- LINS, Marcos Pereira Estellita; MEZA, Lídia Ângulo. Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no Ambiente de Apoio à Decisão. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2000.
- LINS, Marcos Pereira Estellita; MOREIRA, Maria Cristina Bessa. Implementação com Seleção de Variáveis em Modelos de DEA. In: LINS,

Marcos Pereira Estellita; MEZA, Lídia Ângulo (org.). Análise Envoltória de Dados e Perspectivas de Integração no Ambiente de Apoio à Decisão. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2000. Cap. III, p.38 – 52.

- PEREIRA, Marcelo Farid. Mensuramento de Eficiência Multidimensional utilizando Análise de Envelopamento de Dados: Revisão da Teoria e Aplicações. Florianópolis, Fevereiro de 1995. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção - Universidade Federal de Santa Catarina. Tese de Mestrado - Consultada no dia 30/01/03 às 15:43 no site: http://www.eps.ufrsc.br/disserta/farid.